Άσκηση 25 2/11/16

$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu = \underbrace{(A_1 - A_2) \cup \ldots \cup (A_\nu - A_1) \cup (A_1 \cap \ldots \cap A_\nu)}_{B} =$

$\supseteq$

$A_1 - A_2 \subseteq A_1 \subseteq A_1 \cup A_2 \ldots = A$

$A_2 - A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1 \cup A_2 \cup \ldots = A$

$\vdots$

$A_1 - A_\nu \subseteq A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_\nu = A$

$A_1 \cap \ldots A_\nu \subseteq A_1 \subseteq A$

$\Rightarrow B \subseteq A$

$\subseteq$

Έστω ότι $x \in A_1$

$x \in (A_1 - A_2) \cup \ldots \cup (A_\nu - A_1)$

τότε $x \in B$

$x \notin A_1 - A_2 \Rightarrow x \in A_2$

$\notin A_2 - A_3 \Rightarrow x \in A_3$

$\notin A_3 - A_4 \Rightarrow x \in A_4$

$\vdots$

$\notin A_{\nu-1} - A_\nu \Rightarrow x \in A_\nu$

$\notin A_\nu - A_1$

$\Rightarrow x \in A_1 \cap \ldots A_\nu \Rightarrow x \in B$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ας είναι $\sigma : E \to E$, Δ: διαγώνιος του E. Τότε

α) η σ είναι ανακλαστική $\Leftrightarrow \Delta \subseteq \sigma$

β) συμμετρική $\Leftrightarrow \sigma = \sigma^{-1}$

γ) αντισυμμετρική $\Leftrightarrow \sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta$

δ) μεταβατική $\Leftrightarrow \sigma \circ \sigma^{-1} \subseteq \sigma$

απόδειξη (δ): ($\Rightarrow$) Υποθ. ότι η σ είναι μεταβατική. Θα αποδείξω ότι $\sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$.

Ας είναι $(x,y) \in \sigma \circ \sigma$

τότε $\exists z \in E : (x,z) \in \sigma \wedge (z,y) \in \sigma$

$\xRightarrow{\sigma \text{ μεταβ.}} (x,y) \in \sigma$

δηλ. $\sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$.

($\Leftarrow$) Υποθ. ότι $\sigma \circ \sigma^{-1} \subseteq \sigma$. Θα αποδείξω ότι η σ είναι μεταβατική.

Ας είναι $(x,y,z) \in E$ με $(x,y) \in \sigma$, $(y,z) \in \sigma$

Από τις προηγούμενες σχέσεις έχω $x\sigma y \wedge y \sigma z$

άρα $(x,z) \in \sigma \circ \sigma$ (ορ. σύνθεσης)

$\subseteq \sigma$

δηλ. έχουμε $\left.\begin{array}{l}(x,y) \in \sigma \\ (y,z) \in \sigma\end{array}\right\} \Rightarrow (x,z) \in \sigma$ άρα σ μεταβατική

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια σχέση $\sigma : E \to E$ θα καλείται σχέση ισοδυναμίας [αν η] σ είναι ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική.

Παράδειγμα $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με $x\sigma y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k$

$3 \not\sigma 5 \quad (3,5) \notin \sigma$

$7 \sigma 16 \quad (7,16) \in \sigma$

$\forall x \in \mathbb{N}, \; x - x = 0 \cdot 3 \Rightarrow (x,x) \in \sigma$: σ ανακλαστική

$(x,y) \in \sigma \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k \Rightarrow y - x = 3(-k) \Rightarrow (y,x) \in \sigma$
$\Downarrow$
σ συμμετρική

αν $\left.\begin{array}{l}(x,y) \in \sigma \\ (y,z) \in \sigma\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\exists k_1 \in \mathbb{Z} : x - y = 3k_1 \\ \exists k_2 \in \mathbb{Z} : y - z = 3k_2\end{array} \Bigg| \Rightarrow x - z = 3(\underbrace{k_1 + k_2}_{\in \mathbb{Z}}) \to (x,z) \in \sigma$

δηλ. σ μεταβατική.

Για $a \in E$ θέτουμε $\kappa\lambda_\sigma(a) = \{x \in E : (x,a) \in \sigma\}$

Εφαρμόζω στο προηγούμενο παράδειγμα

$\kappa\lambda_\sigma(1) = \{x \in \mathbb{N} : x\sigma 1\}$

$= \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{Z} : x - 1 = 3k\}$

$= \{x \in \mathbb{N} : x = 1 + 3k \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{Z}\}$

$= \{1, 4, 7, 10, 13 \ldots\}$

$\kappa\lambda_6(2) = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{Z}$ με $(x,2) \in 6\}$

$= \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{Z} : x - 2 = 3k\}$

$= \{x \in \mathbb{N} : x = 2 + 3k$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}\}$

$= \{2, 5, 8, 11 \ldots\}$

► Παράδειγμα: $E = \{(\varepsilon) :$ ευθεία επιπέδου$\}$

$6 : E \to E$

$(x, y) \in 6 \iff x \parallel y$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ας είναι $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας στο E, $a, b \in E$. Τότε:

i) $\kappa\lambda_\sim(a) \neq \emptyset$

ii) $a \sim b \iff \kappa\lambda_\sim a = \kappa\lambda_\sim b$

iii) $a \nsim b \iff$ ~~$\kappa\lambda_\sim a \neq \kappa\lambda_\sim b$~~ $\kappa\lambda_\sim(a) \cap \kappa\lambda_\sim(b) = \emptyset$

Απόδειξη: ii) Υποθ. ότι $a, b \in E$ με $a \sim b$. Θα αποδείξω ότι $\kappa\lambda_\sim(a) = \kappa\lambda_\sim(b)$

Ας είναι $x \in \kappa\lambda_\sim(a)$ τότε $\left.\begin{array}{r} x \sim a \\ a \sim b \end{array}\right\} x \sim b$ (μεταβατική)

$\left.\begin{array}{l} \text{δηλ. } x \in \kappa\lambda_\sim(b) \\ \text{άρα } \kappa\lambda_\sim(a) \subseteq \kappa\lambda_\sim(b) \end{array}\right\}$ ομοίως για $(\supseteq)$ άρα $\kappa\lambda_\sim(a) = \kappa\lambda_\sim(b)$

Αντίστροφα, υποθ. ότι $\kappa\lambda_\sim(a) = \kappa\lambda_\sim(b)$

Θα αποδείξω ότι $a \sim b$.

Είναι $\kappa\lambda_\sim(a) = \kappa\lambda_\sim(b)$

δηλ. $a \in \kappa\lambda_\sim(b) \Rightarrow a \sim b$

Παρατήρηση: Αν $\sim$ σχέση ισοδυναμίας στο E τότε για $a, b \in E$.

$$\kappa\lambda_{\sim}(a) \equiv \kappa\lambda_{\sim}(b) \ \underline{\vee} \ \kappa\lambda_{\sim}(a) \cap \kappa\lambda_{\sim}(b) = \phi$$

▷ $\mathbb{N}, \sigma \rightsquigarrow \kappa\lambda_{\sigma}(1)$, $\kappa\lambda_{\sigma}(2)$, $\kappa\lambda_{\sigma}(3)$ | $\mathcal{C} = \{\kappa\lambda_{\sigma}(1), \kappa\lambda_{\sigma}(2), \kappa\lambda_{\sigma}(3)\} = E/\sigma$

σύνολο πηλίκο

ΠΡΟΤΑΣΗ: i) Ας είναι $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας στο E
Τότε το $E/\sim$ αποτελεί μια διαμέριση του E
ii) Αν $\mathcal{C}$ είναι μια διαμέριση ενός συνόλου $E(\neq \phi)$, τότε το E μπορεί να εφοδιαστεί με μια σχέση ισοδυναμίας σ, τέτοια ώστε $\mathcal{C} = E/\sigma$.

Απόδειξη: i) Αρκεί να αποδείξω ότι: $\forall A, B \subseteq E/\sim \Rightarrow A \cap B = \phi$ και $\bigcup_{E/\sigma} = E$.

Ας είναι $A, B \in E/\sim$, δηλ. $\exists\, a, b \in E : \kappa\lambda_{\sim}(a) = A$, $\kappa\lambda_{\sim}(b) = B$
από την προηγούμενη πρόταση είναι $A \cap B = \phi$ ή $A \equiv B$

Αν $x \in E$ τότε: $x \in \kappa\lambda_{\sim}(x) \subseteq E$

$$\Rightarrow x \in \bigcup_{x \in E} \kappa\lambda_{\sim}(x) \subseteq E$$

δηλ. $x \in \bigcup_{E/\sim} \subseteq E$

$$\Rightarrow E = \bigcup_{\{x \in E\}} \subseteq \bigcup_{E/\sim} \subseteq E$$

HW. A29 στ. || → Αν σ_1 μια σχέση ισοδυναμίας στο E } $\sigma_1 \cap \sigma_2$
A32 || σ_2 —— || —— E } σχέση ισοδυναμίας στο E
A30

(*) Αν σ_1 σχέση ισοδυναμίας στο E_1

σ_2 — || — στο E_2

→ η $\sigma : E_1 \times E_2 \to E_1 \times E_2$

με $(x,y)\,\sigma\,(z,\omega) = (x\,\sigma_1\,z,\; y\,\sigma_2\,\omega)$

είναι σχ. ισοδυναμίας στο $E_1 \times E_2$

ii) Να βρεθούν οι κλσ συναρτήσεις των $\kappa\lambda_{\sigma_1}$, $\kappa\lambda_{\sigma_2}$